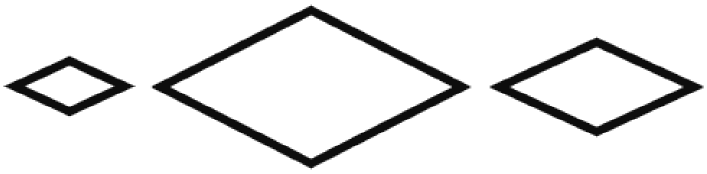
Semelhança de polígonos

Teoria

Pegue uma figura e a aumente. Depois, a diminua. Temos 3 figuras com o mesmo desenho, só que de tamanhos diferentes. Dizemos, assim, que elas são semelhantes entre si.

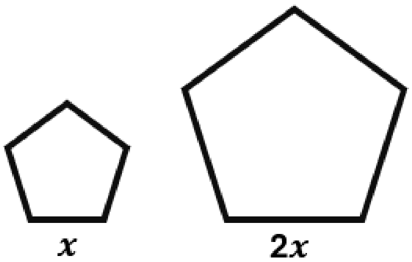
> Exemplo:
>
> 

Agora, vamos formalizar esse conceito.

Semelhança de polígonos

Polígonos são semelhantes quando possuem:

- Ângulos respectivamente iguais.
- A mesma quantidade de lados.
- Lados homólogos proporcionais.

> Exemplo:
>
> 
>

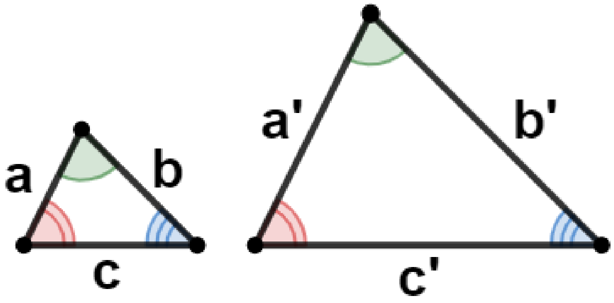
Os dois pentágonos são semelhantes e seus lados homólogos são proporcionais.

Observação: as áreas de polígonos semelhantes também são proporcionais e essa propoção é sempre o quadrado da proporção entre os comprimentos dos lados correspondentes desses polígonos.

Vamos estudar o caso mais clássico de semelhança: **triângulos**.

Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes se possuírem os ângulos iguais. Na verdade, se garantirmos que 2 ângulos são iguais, já podemos dizer que são semelhantes, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é constante igual a 180 graus.



Temos que:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

Dizemos que a e a', b e b', c e c' são pares de lados homólogos e k é a razão de semelhança.

A razão de semelhança é válida para todas as medidas lineares (alturas, medianas e perímetro, por exemplo).

E se quisermos calcular a razão entre as áreas de polígonos semelhantes? A razão entre as áreas será k^2 .

Além disso, a semelhança entre triângulos também ocorre em outros casos:

- **Caso LAL (Lado, Ângulo, Lado)**: dois triângulos são semelhantes se possuem dois lados correspondentes proporcionais e o ângulo formado por eles é congruente.
- **Caso LLL (Lado, Lado, Lado)**: dois triângulos que possuem todos os lados correspondentes proporcionais são semelhantes.
- **Caso AA (Ângulo, Ângulo)**: dois triângulos que possuem dois ângulos correspondentes congruentes são semelhantes.

Exercícios de fixação

1. Dois triângulos ABC e DEF são semelhantes entre si. Sabendo que no triângulo ABC o lado AB = 12m, AC = 10m e BC = 8m e no triângulo DEF o lado DE = 6m. Calcule o valor do lado DF.

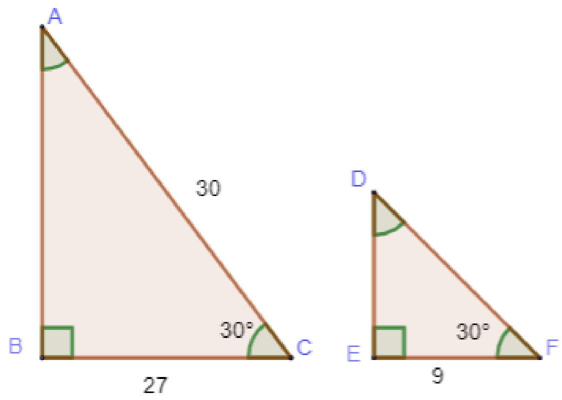
2. Sobre semelhança de triângulos, é correto afirmar que:

(A) Dois triângulos são semelhantes se tiverem dois lados proporcionais e um ângulo congruente em qualquer ordem.

(B) Dois triângulos são semelhantes se não possuírem dois ângulos correspondentes congruentes.

(C) A razão entre a área de dois triângulos semelhantes é dada por k^2.

3. Dados os triângulos abaixo, onde as medidas estão em centímetros,



O valor de DF é:

(A) 20.

(B) 10.

(C) 30.

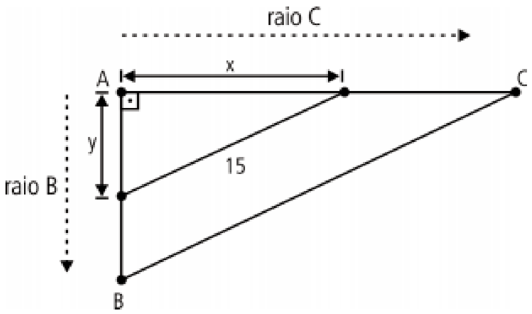
(D) 3.

4. Sabendo que a razão de semelhança do triângulo ABC para o triângulo DEF é 2 e que ABC tem lados iguais a 8cm, 18cm e 16cm, respectivamente, determine os lados de um triângulo DEF semelhante ao ABC.

5. Em um triângulo ABC onde M é ponto médio do lado AB e N é ponto médio do lado AC, o segmento MN mede 12cm e o segmento BC mede 21cm e MN é paralelo a BC. O triângulo AMN tem altura igual a 8 e o triângulo ABC tem altura igual a 8 + x. Determine o valor de x.

Exercícios de vestibulares

1. (UEA, 2013) Suponha que dois navios tenham partido ao mesmo tempo de um mesmo porto A em direções perpendiculares e a velocidades constantes. Sabe-se que a velocidade do navio B é de 18km/h e que, com 30 minutos de viagem, a distância que o separa do navio C é de 15km, conforme mostra a figura:



Desse modo, pode-se afirmar que, com uma hora de viagem, a distância, em quilômetros, entre os dois navios e a velocidade desenvolvida pelo navio C, em quilômetros por hora, serão, respectivamente:

(A) 30 e 25.

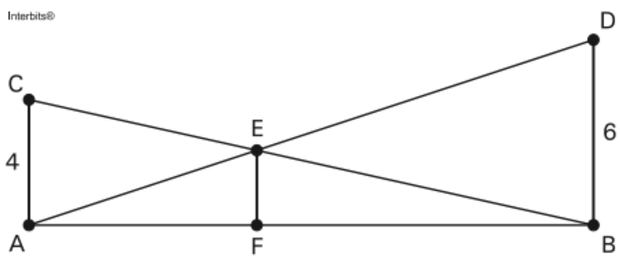
(B) 25 e 22.

(C) 30 e 24.

(D) 25 e 20.

(E) 25 e 24.

2. (Enem, 2013) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6m e 4m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

(A) 1m.

(B) 2m.

(C) 2,4m.

(D) 3m.

(E) $2\sqrt{6}$m.

3. (Enem, 2009) A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro. A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é:

(A) 1,16 metros.

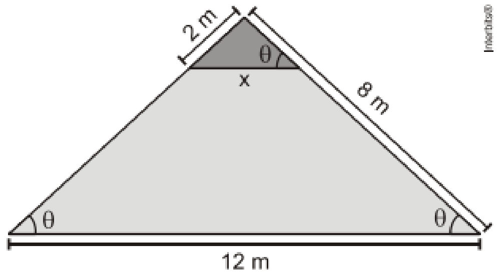
(B) 3,0 metros.

(C) 5,4 metros.

(D) 5,6 metros.

(E) 7,04 metros.

4. (PUCRS, 2014) Considere a imagem abaixo, que representa o fundo de uma piscina em forma de triângulo com a parte mais profunda destacada.



O valor em metros da medida x é:

(A) 2.

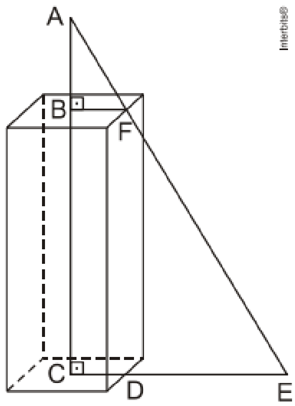
(B) 2,5.

(C) 3.

(D) 4.

(E) 6.

5. (CPS, 2010) Marcelo mora em um edifício que tem a forma de um bloco retangular e, no topo desse edifício, está instalada uma antena de 20 metros. Após uma aula de Matemática, cujo tema era Semelhança de Triângulos, Marcelo resolveu aplicar o que aprendeu para calcular a altura do prédio onde mora. Para isso, tomou algumas medidas e construiu o seguinte esquema:



- O segmento $\overline{AC}$ é perpendicular aos segmentos $\overline{BF}$ e $\overline{CE}$;
- o segmento $\overline{AC}$ representa a antena;
- o segmento $\overline{BC}$ representa a altura do prédio;
- ponto D pertence ao segmento $\overline{CE}$;
- o ponto F pertence ao segmento $\overline{AE}$;
- o ponto B pertence ao segmento $\overline{AC}$;
- os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{FD}$ são congruentes;
- a medida do segmento $\overline{BF}$ é 12m;
- a medida do segmento $\overline{DE}$ é 36m.

Assim, Marcelo determinou que a altura do prédio é, em metros,

(A) 45.

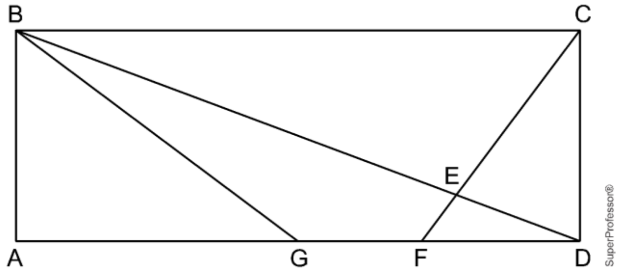
(B) 50.

(C) 60.

(D) 65.

(E) 70.

6. (UFMS, 2021) Na figura a seguir, há um retângulo ABCD, e os triângulos ΔABG e ΔDFC são semelhantes. O Ângulo $C\widehat{B}G = 37°$.



Ao prolongar os segmentos de reta $\overline{BG}$ e $\overline{CF}$, o ângulo formado pelo cruzamento dos segmentos é:

(A) 37°.

(B) 53°.

(C) 90°.

(D) 127°.

(E) 143°.

7. (Enem, 1998) A sombra de uma pessoa que tem 1,80 de altura mede 60cm. No mesmo momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,00m. Se, mais tarde, a sombra do poste diminuiu 50cm, a sombra da pessoa passou a medir:

(A) 30cm.

(B) 45cm.

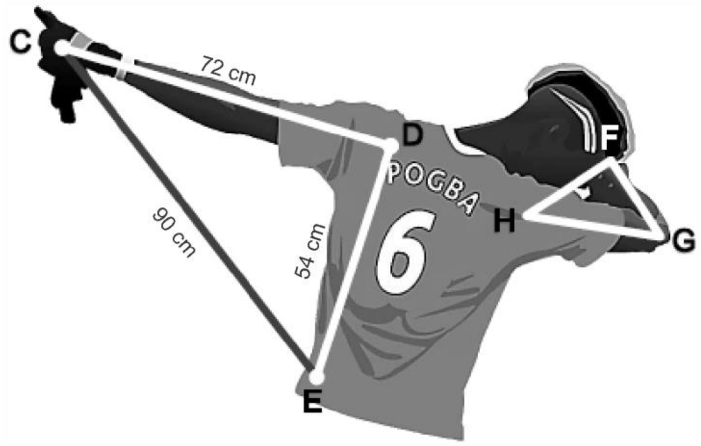
(C) 50cm.

(D) 80cm.

(E) 90cm.

8. (CMRJ, 2020) Um professor de matemática francês aproveitou a comemoração dos gols de Paul Pogba, através de um gesto chamado «dab», para criar para seus alunos um problema relacionado com o Teorema de Pitágoras.

A proposta era encontrar uma solução que ajudasse o jogador francês a realizar de forma perfeita o «dab».



Disponível em https:<//maisfutebol.iol.pt/incrivel/internacional/celebracao-de-pogba-da-origem-a-problema-matematico>. Acesso em 06/08/2019. Texto adaptado.

Observe a figura acima. O triângulo CDE, formado pelo braço esticado de Pogba (segmento $\overline{\mathrm{CD}}$), não é semelhante ao triângulo FGH, formado pelo outro braço flexionado, cujas extremidades são H e F. Admitindo-se que o triângulo CDE não pode ser alterado em suas medidas, quais deveriam ser as medidas em centímetros do triângulo FGH para que os dois triângulos se tornassem semelhantes?

(A) $30,\ 24$ e $18\mathrm{cm}$.

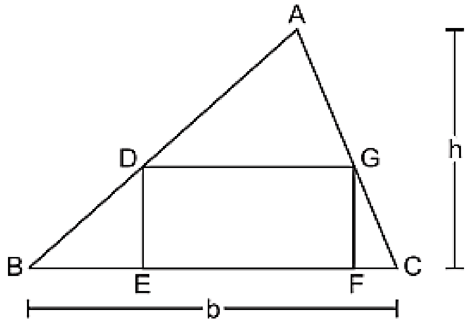
(B) $35,\ 28$ e $21\mathrm{cm}$.

(C) $40,\ 32$ e $28\mathrm{cm}$.

(D) $45,\ 36$ e $27\mathrm{cm}$.

(E) $48,\ 24$ e $20\mathrm{cm}$.

9. (Fuvest, 2003) O triângulo ABC tem altura h e base b (ver figura). Nele, está inscrito o retângulo DEFG, cuja base é o dobro da altura. Nessas condições, a altura do retângulo, em função de h e b, é dada pela fórmula:



(A) $\frac{bh}{b+h}$

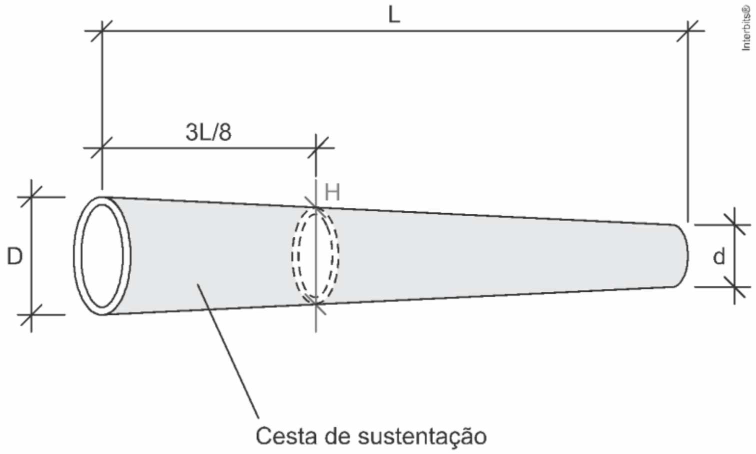
(B) $\frac{2bh}{b+h}$

(C) $\frac{bh}{2b+h}$

(D) $\frac{bh}{b+2h}$

(E) $\frac{bh}{2(b+h)}$

10. (Unesp, 2021) O indicador de direção do vento, também conhecido como biruta, é item obrigatório em todo heliponto. Suas dimensões devem estar em conformidade com a figura e com a tabela apresentadas na sequência, retiradas do Regulamento Brasileiro da Aviação Civil.



Dimensões	Heliponto elevado (cm)	Heliponto ao nível do solo (cm)
L	120	240
D	30	60
d	15	30

(Agência Nacional de Aviação Civil. RBAC nº 155, 25.05.2018. Adaptado.)

A fabricação da cesta de sustentação é baseada nos valores de D, L e H e considera que a figura corresponde a um tronco de cone reto, cujas circunferências de diâmetros D, H e d são paralelas. No caso de o heliponto estar ao nível do solo, o valor de H é igual a

(A) 52,50cm.

(B) 41,25cm.

(C) 48,75cm.

(D) 37,50cm.

(E) 45,00cm.

Se liga!

Sua específica é Matemáticas e quer continuar treinando esse conteúdo?
Clique aqui para fazer uma lista extra de exercícios.

Gabaritos

Exercícios de fixação

1. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Então temos que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k$$

Sabemos que AB = 12m, AC = 10m, BC = 8m e DE = 6m, podemos usar então:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

$$\frac{12}{6} = \frac{10}{DF}$$

$$12 \cdot DF = 6 \cdot 10$$

$$DF = 5m.$$

2. **C**

[A] Incorreta. Dois triângulos são semelhantes se tiverem dois lados correspondentes proporcionais e o ângulo formado por eles for congruente.

[B] Incorreta. A definição diz que dois triângulos são semelhantes se possuírem dois ângulos iguais.

[C] Correta.

3. **B**

Temos que são semelhantes pelo caso AA, logo

$$\frac{30}{27} = \frac{DF}{9} \rightarrow DF = 10cm$$

4. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Então,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k$$

A razão de semelhança é $k = 2$ e tomemos AB = 8cm, AC = 16cm e BC = 18cm. Temos então que:

$$\frac{AB}{DE} = 2$$

$$8 = 2 \cdot DE$$

$$DE = \frac{8}{2} = 4cm$$

$$\frac{BC}{EF} = 2$$

$$18 = 2 \cdot EF$$

$$EF = \frac{18}{2} = 9cm$$

$$\frac{AC}{DF} = 2$$

$$16 = 2 \cdot DF$$

$$DF = \frac{16}{2} = 8cm$$

5. O triângulo ABC é semelhante ao triângulo AMN, a razão de semelhança será dada por:

$$\frac{BC}{MN} = k$$

Sendo BC = 21cm e MN = 12cm

$$\frac{21}{12} = k$$

Simplificando por 3, temos:

$$k = \frac{7}{4}$$

Se a altura do triângulo ABC é igual a 8+x e a altura do triângulo AMN é igual a 8, então:

$$\frac{8 + x}{8} = k$$

$$\frac{8 + x}{8} = \frac{7}{4}$$

$$32 + 4x = 56$$

$$4x = 24$$

$$x = 6cm$$

Exercícios de vestibulares

1. **C**

Se B está a 18km/h e já se passaram 30min, então

$y = \frac{18}{2} = 9\text{km}$

Por Pitágoras, temos que

$x^2 + y^2 = 15^2$

$x^2 + 9^2 = 15^2$

$x = 12$

Após 1 hora, a medida do segmento "raio B" medirá 18km.

Para descobrir a hipotenusa do triângulo maior, cujo cateto já sabemos que mede 18, usaremos semelhança de triângulos.

$\frac{15}{BC} = \frac{9}{18}$

Resolvendo a equação, encontramos BC = 30km. Como podemos ver, o triângulo maior tem o dobro das medidas do triângulo menor, assim, AC = 24km.

2. **C**

Podemos ver que os triângulos AEC e BED são semelhantes. Logo,

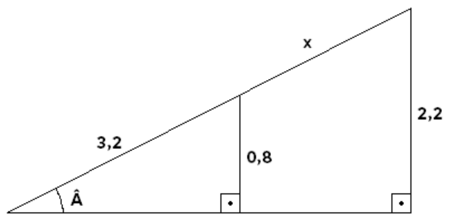
$\frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BD} \leftrightarrow \frac{AF}{BF} = \frac{4}{6} \leftrightarrow \frac{AF+BF}{AF} = \frac{2+3}{2} \leftrightarrow \frac{AF}{AF+BF} = \frac{2}{5}$

Além disso, como os triângulos AEF e ABD também são semelhantes, vem

$\frac{AF}{AB} = \frac{EF}{BD} \leftrightarrow \frac{AF}{AF+BF} = \frac{EF}{6} \leftrightarrow \frac{EF}{6} = \frac{2}{5} \leftrightarrow EF = 2{,}4\text{m}$

3. **D**

Observe a figura:



O triângulo grande e o pequeno são semelhantes, pois têm os mesmos ângulos. Assim, podemos calcular por semelhança o valor de x:

$\frac{0{,}8}{2{,}2} = \frac{3{,}2}{3{,}2+x}$

$0{,}8(3{,}2 + x) = 3{,}2 \cdot 2{,}2$

$2{,}56 + 0{,}8x = 7{,}04$

$0{,}8x = 7{,}04 - 2{,}56$

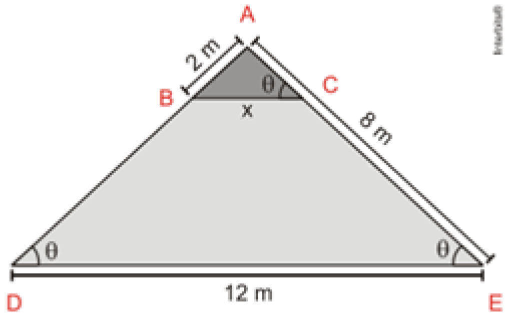
$0{,}8x = 4{,}48$

$x = \frac{4{,}48}{0{,}8}$

$x = 5{,}60$

Resolvendo a equação, encontramos x = 5,6 metros.

4. C



O triângulo ADE é isóscele, logo AD = 8m

O triângulo ABC é semelhante ao triângulo ADE, portanto:

$\frac{2}{8} = \frac{x}{12} \rightarrow 8x = 24$

$x = 3m$

5. C

Considerando x a altura do prédio, temos:

$\Delta ABF \sim \Delta ACE$

$\frac{20}{20 + x} = \frac{12}{12 + 36}$

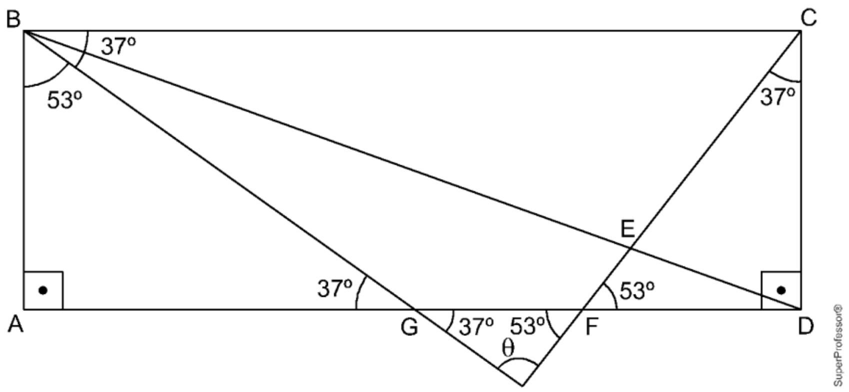
$\frac{20}{20 + x} = \frac{1}{4}$

$80 = 20 + x$

$x = 60m$

6. C

Como os triângulos ΔABG e ΔDFC são semelhantes, obtemos os ângulos indicados na figura abaixo:

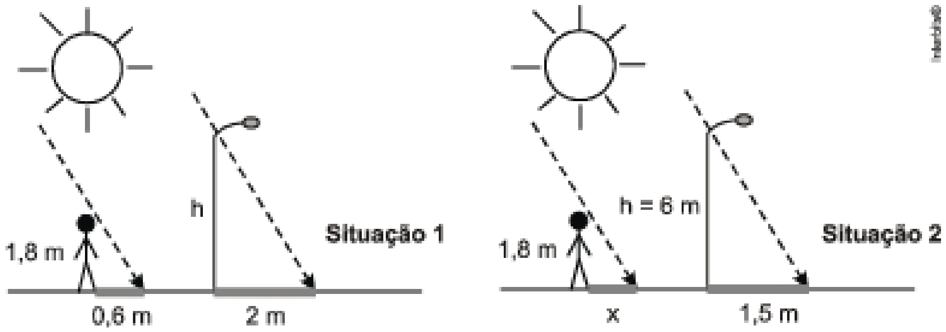


Sendo assim, o ângulo formado pelo cruzamento dos segmentos é:

$\theta + 37° + 53° = 180°$

$\therefore \theta = 90°$

7. B



$$\frac{1{,}8}{h} = \frac{0{,}6}{2} \leftrightarrow h = 6m$$
$$\frac{1{,}8}{6} = \frac{x}{1{,}5} \leftrightarrow x = 0{,}45m = 45cm$$

8. D

Sejam CDE e HFG triângulos semelhantes. Logo, supondo que os braços de Pogba tenham o mesmo comprimento, devemos ter $\overline{CD} = \overline{HG} + \overline{GF}$. Em consequência, da semelhança dos triângulos, vem

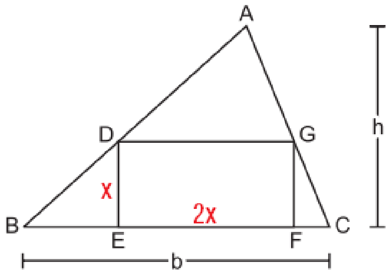
$$\begin{aligned}\frac{\overline{GF}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{HG}}{\overline{CE}} &\Leftrightarrow \frac{\overline{GF} + \overline{HG}}{\overline{DE} + \overline{CE}} = \frac{\overline{HG}}{\overline{CE}} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{HG}}{90} = \frac{72}{54 + 90} \\ &\Leftrightarrow \overline{HG} = 45\text{cm}.\end{aligned}$$

Portanto, como HG é o maior lado do triângulo, só pode ser a alternativa [D].

Observação: Note que os triângulos CDE e HFG são semelhantes ao triângulo retângulo pitagórico de lados 3, 4 e 5.

9. D

Primeiramente, vamos colocar as informações que o exercício nos deu no triângulo. A base é o dobro da altura, então vamos chamar de x a altura do retângulo e 2x sua base (já que é o dobro, como mostra o exercício). Veja como fica.



Repare agora que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo ADG, ou seja, o segmento de um deles sobre o segmento correspondente no outro é uma constante. Dessa forma, podemos montar uma relação entre a altura do triângulo ABC e do ADG e também de suas bases.

Veja: Altura do triângulo ABC = h
Altura do triângulo ADG = h-x (ou seja, a altura do triângulo ABC menos a altura do retângulo)
Base do triângulo ABC = b
Base do triângulo ADG = 2x

Assim, podemos montar e resolver a seguinte equivalência:

$$\frac{h-x}{h}=\frac{2x}{b}$$

$$2hx = b(h-x)$$

$$2hx = bh - bx$$

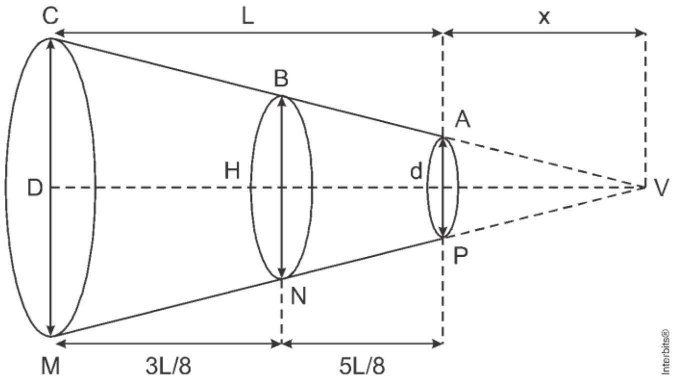
$$2hx + bx = bh$$

$$x(2h+b) = bh$$

$$x = \frac{bh}{2h+b}$$

10. C

Temos a seguinte configuração:



Por semelhança de triângulos, obtemos:

$\Delta VAP \sim \Delta VCM$:

$$\frac{x}{x+L} = \frac{d}{D}$$

$$\frac{x}{x+240} = \frac{30}{60}$$

$$2x = x + 240$$

$$x = 240\text{cm}$$

$\Delta VAP \sim \Delta VBN$:

$$\frac{x}{x+\frac{5L}{8}} = \frac{d}{H}$$

$$\frac{240}{240+\frac{5}{8}\cdot 240} = \frac{30}{H}$$

$$8H = 240 + 150$$

$$8H = 390$$

$$\therefore H = 48{,}75\text{cm}$$